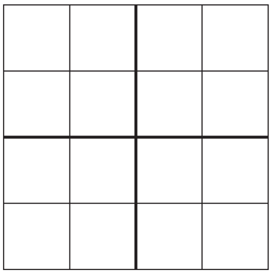
第３講　場合の数・確率⑴

1　右図のように，4 行 4 列の 16 個のマス目をつくり，さらに太線でそれぞれ 2 行 2 列からなる 4 つの区画に分ける．それぞれのマス目に 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書き込む．ただし，以下の 3 つの条件をすべて満たすものとする．



(i)　各行には 1，2，3，4 が 1 回ずつ現れる．
(ii)　各列には 1，2，3，4 が 1 回ずつ現れる．
(iii)　各区画には 1，2，3，4 が 1 回ずつ現れる．

数字の書き込み方は全部で何通りあるか．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数字 1, 2, 3 を使ってできる次のような整数の個数を求めよ．ただし，同じ数字を重複して使ってよいものとする．

(1)　5 桁の整数

(2)　5 桁の整数で 2 の倍数

(3)　5 桁の整数で 3 の倍数

(4)　5 桁の整数で 4 の倍数

(5)　5 桁の整数で 6 の倍数

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　$-$，1，2，3 の符号や数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがあり，これを並べて数をつくる．ただし，$-$ が最後になる並べ方は除くものとし，数は計算した結果で考える．たとえば，$1-23$ という並べ方は -22 という数であると考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　このような並べ方は全部で何通りあるか．また，できた数の中で最小のもの，最大のものは何か．

(2)　できた数すべての合計を求めよ．

［2］　空間において座標 $(x,\ y,\ z)$ にある点 P を 1 回の操作で $(x+1,\ y,\ z)$，$(x,\ y+1,\ z)$，$(x,\ y,\ z+1)$ のいずれかを選んでその座標に移動させる．最初に $(0,\ 0,\ 0)$ にある点 P を，9 回の操作で $(3,\ 3,\ 3)$ に移動させる選び方のうち，$(3,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 3,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 3)$，$(3,\ 3,\ 0)$，$(3,\ 0,\ 3)$，$(0,\ 3,\ 3)$ のいずれも経由しないものは何通りあるか求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　場合の数・確率(1)

1，2，3，4，5の5種類の数字を，同じ数字を繰り返し用いることを許して3桁の整数をつくるとき，できる3桁の整数は全部で **アイウ** 個ある．そのうち，3の倍数となるものの個数を求めたい．1，2，3，4，5の各数字を3で割った余りで分類すると，余りが0になる数は **エ** 個，余りが1になる数は **オ** 個，余りが2になる数は **カ** 個ある．3桁の整数の各位の数字が3で割った余りが0になる数のみで構成されているとき，その整数は **キ** 個あり，余りが1になる数のみ，余りが2になる数のみであるときは，その整数はともに **ク** 個ずつある．各位の数字が，3で割った余りが0，1，2になる数1つずつで構成されているときも考えると，3の倍数となるものは全部で **ケコ** 個ある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　場合の数・確率(1)

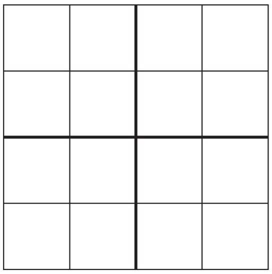
1　右図のように，4行4列の16個のマス目をつくり，さらに太線でそれぞれ2行2列からなる4つの区画に分ける．それぞれのマス目に1から4までの数字を1つずつ書き込む．ただし,以下の3つの条件をすべて満たすものとする．

(i)　各行には1，2，3，4が1回ずつ現れる．

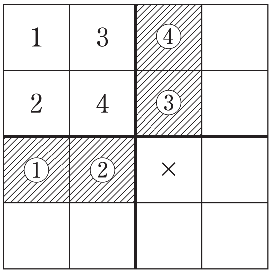
(ii)　各列には1，2，3，4が1回ずつ現れる．

(iii)　各区画には1，2，3，4が1回ずつ現れる．

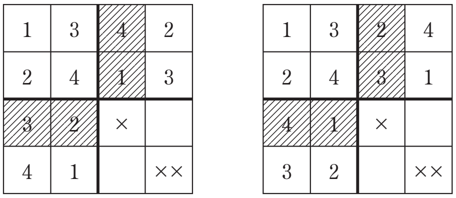
数字の書き込み方は全部で何通りあるか．



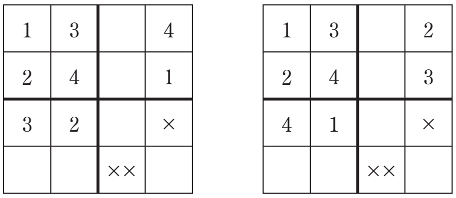
右図のように，左上の区画に1，2，3，4を書き込むとする．
これに隣接する右上，左下のマス目に書き込む方法は，右図の①～④にそれぞれ書き込む方法であるから
$2^4=16$（通り）である．



このうち，①～④に1，2，3，4が1つずつ入るとすると×の箇所には数字を書き込むことができない．
ここで，①は3か4である．それに応じて右上，左下の区画に書き込む方法は右図の2通りのみである．このとき，同時に××の箇所も数字を書き込むことができない．



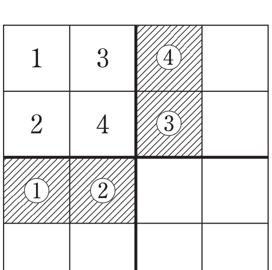
同様に，右下の区画に数字を書き込むことができない例として右図の2通りがある．



したがって，左上の区画の決め方に対し，右下の区画に書き込むことができない場合が4通りある．この4通りを除く12通りは，右下の区画が条件によりただ1通りに決まる．左上の区画の決め方は　$4!=24$（通り）
よって，求める場合の数は　$24\times12=$**288（通り）**である．

【別解】

右図のように，左上の区画に1，2，3，4を書き込むとする．
これに隣接するマス目を図のように①～④とすると，①～④にすべて異なる数字が入っていなければ，残りのマス目に書き込む数字は1通りに定まる．



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

①～④に数字を書き込む方法は，例として右図(i)のようになる．
ここで最右端の2列を入れ換えても条件は満たされる．同様に最下端の2行を入れ換えても条件は満たされるので，このとき　$2\times2=4$（通り）
の書き込み方がある．

(i)

1	3	2	4
2	4	1	3
3	2	4	1
4	1	3	2

(ii)

1	3	2	4
2	4	3	1
3	1	4	2
4	2	1	3

①～④に数字を書き込む方法は，他に右図(ii)～(iv)とそのそれぞれについて右2列，下2行を入れ換えた書き込み方があり，条件を満たすのは
(ii)の場合　$2\times2=4$（通り）
(iii)の場合　$2\times2=4$（通り）
(iv)の場合は，①～④の数字がすべて異なり，×の箇所に数字を書き込むことができないので
0通り
となる．

(iii)

1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1

(iv)

1	3	4	2
2	4	1	3
3	2	×	
4	1		×

よって(i)～(iv)に数字を書き込む方法は　$4+4+4+0=12$（通り）である．

さらに左上の区画に数字を書き込む方法は　${}_4P_4=4!=24$（通り）あるので，題意を満たす書き込み方は全部で　$24\times12=$**288（通り）**となる．

> **2**　数字1，2，3を使ってできる次のような整数の個数を求めよ．ただし，同じ数字を重複して使ってよいものとする．
> (1)　5桁の整数　　(2)　5桁の整数で2の倍数
> (3)　5桁の整数で3の倍数　　(4)　5桁の整数で4の倍数
> (5)　5桁の整数で6の倍数

(1)　各位の数字はそれぞれ1，2，3の3通り．よって5桁の整数は　$3^5=$**243（個）**

(2)　2の倍数は1の位が2の倍数，すなわち2であればよい．よって　$3^4\times1=$**81（個）**

(3)　3の倍数は各位の数字の和が3の倍数のときである．
1の位以外の4桁の数字の和が3の倍数のとき，1の位は3であればよく，
和が　(3の倍数)$+1$　のときは，1の位は2
和が　(3の倍数)$+2$　のときは，1の位は1
であればよい．
すなわち，1の位以外の4桁を決めると，1の位はそれに応じて1通りに決まる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$3^4\times1=$**81**（個）

⑷　4の倍数になるのは，下2桁が4の倍数のときであり，12と32に限られる．
よって　$3^3\times2=$**54**（個）

⑸　6の倍数，すなわち2の倍数かつ3の倍数になるときを考える．
　2の倍数になるのは1の位が2のとき．
よって残り4桁の和が　(3の倍数)+1　となればよい．
⑶と同様に，万，千，百の位の数字の和に応じて，十の位の数字はただ1通りに決まる．
したがって　$3^3\times1\times1=$**27**（個）

3　[1]　−，1，2，3の符号や数字が1つずつ書かれた4枚のカードがあり，これを並べて数をつくる．ただし，−が最後になる並べ方は除くものとし，数は計算した結果で考える．たとえば，1−23という並べ方は−22という数であると考える．このとき，次の問いに答えよ．

⑴　このような並べ方は全部で何通りあるか．また，できた数の中で最小のもの，最大のものは何か．

⑵　できた数すべての合計を求めよ．

⑴　最後にくるカードはマイナスを除く3通り．それに対し，残りの3枚のカードの並べ方が　$3!=6$（通り）　よって並べ方は　$3\times6=$**18**（通り）
そのうち最小のものは　**−321**，最大のものは　$32-1=$**31**　である．

⑵　先頭が−のものの和は　$-123-132-213-231-312-321=-1332$
　残り12個の並べ方は，$12-3$と$3-12$のように，−の前後の数を入れ替えたものの組として存在する．それぞれの組の和は0である．
したがって，求める合計は　**−1332**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

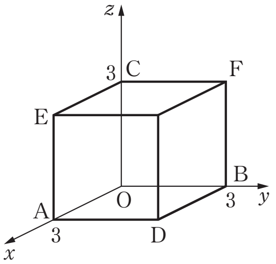
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［2］　空間において座標 $(x,\ y,\ z)$ にある点Ｐを１回の操作で $(x+1,\ y,\ z)$，$(x,\ y+1,\ z)$，$(x,\ y,\ z+1)$ のいずれかを選んでその座標に移動させる．最初に $(0,\ 0,\ 0)$ にある点Ｐを，９回の操作で $(3,\ 3,\ 3)$ に移動させる選び方のうち，$(3,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 3,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 3)$，$(3,\ 3,\ 0)$，$(3,\ 0,\ 3)$，$(0,\ 3,\ 3)$ のいずれも経由しないものは何通りあるか求めよ．

$(x,\ y,\ z)$ を $(x+1,\ y,\ z)$，$(x,\ y+1,\ z)$，$(x,\ y,\ z+1)$ に移動させることをそれぞれ X，Y，Z と表すとする．

$(0,\ 0,\ 0)$ から９回の移動で $(3,\ 3,\ 3)$ に移動する場合の数は　$\dfrac{9!}{3!3!3!}=1680$（通り）

右図のように点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆを設定する．



① Ａ または Ｂ または Ｃ を通るのは

　９回の移動の先頭が XXX，YYY，ZZZ のとき．

　それぞれ残りの移動が　$\dfrac{6!}{3!3!}=20$（通り）

　９回の移動で通ることができるのはＡ，Ｂ，Ｃのいずれか１点のみ．

② Ｄ または Ｅ または Ｆ を通るのは

　９回の移動の末尾が ZZZ，YYY，XXX のとき．

　それぞれ残りの移動が　$\dfrac{6!}{3!3!}=20$（通り）

　９回の移動で通ることができるのはＤ，Ｅ，Ｆのいずれか１点のみ．

①と②が同時に起こるのは，Ａ，Ｂ，Ｃのそれぞれに対し，Ｄ，Ｅ，Ｆの選び方として２通りずつある．よって　$3\times2=6$（通り）

したがって，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆの少なくとも１つを通るのは

　$20\times3+20\times3-6=114$（通り）

ゆえに，求める場合の数は　$1680-114=$ **1566（通り）** である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　場合の数・確率(1)

1，2，3，4，5の5種類の数字を，同じ数字を繰り返し用いることを許して3桁の整数をつくるとき，できる3桁の整数は全部で［アイウ］個ある．そのうち，3の倍数となるものの個数を求めたい．1，2，3，4，5の各数字を3で割った余りで分類すると，余りが0になる数は［エ］個，余りが1になる数は［オ］個，余りが2になる数は［カ］個ある．3桁の整数の各位の数字が3で割った余りが0になる数のみで構成されているとき，その整数は［キ］個あり，余りが1になる数のみ，余りが2になる数のみであるときは，その整数はともに［ク］個ずつある．各位の数字が，3で割った余りが0，1，2になる数1つずつで構成されているときも考えると，3の倍数となるものは全部で［ケコ］個ある．

3桁の整数は全部で　$5^3=\mathbf{125}$（個）できる．

1，2，3，4，5のうち

　3で割った余りが0であるものは3のみの**1**個

　3で割った余りが1であるものは1，4の**2**個

　3で割った余りが2であるものは2，5の**2**個

である．

3桁の整数の各位の数が

　3で割った余りが0になる数のみで構成されているとき，その整数は$1^3=\mathbf{1}$個　……①

　3で割った余りが1になる数のみで構成されているとき，その整数は$2^3=\mathbf{8}$個　……②

　3で割った余りが2になる数のみで構成されているとき，その整数は$2^3=\mathbf{8}$個　……③

である．

また，3で割った余りが0，1，2の数字1つずつで構成されているとき

　その数字の選び方が，$1\times2\times2=4$（通り）

　それらの順列を考えて　$3!=6$（通り）

よって　$4\times6=24$（個）　……④ある．

3の倍数となるものは，各位の数の和が3の倍数である．また和が3の倍数となるのは，それぞれの数字を3で割った余りの和が3の倍数となるときである．それは①～④の場合であり，それですべてである．

したがって，3の倍数となるものは　$1+8+8+24=\mathbf{41}$（個）ある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。